線形代数1, 第20回小テスト解答

2015/12/17 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & a+1 & 3 \\ 2a & 2 & a \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないような定数 a の値を <u>全て</u> 求めよ. (3点)

解答)

行列 A が逆行列 A^{-1} を持たないためには $|A|=0$ が必要かつ十分である.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 0 & a+1 & 3 \\ 2a & 2 & a \end{vmatrix} \overset{③-2\times①}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & -2 & -a \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=\!=\!=} a\begin{vmatrix} a+1 & 3 \\ -2 & -a \end{vmatrix}$$

$$= a(-a(a+1)+3(-2)) = a(-a^2-a+6) = -a(a^2+a-6) = -a(a+3)(a-2)$$

従って $a=0,-3,2$

$\boxed{2}$ 3次行列 A の行列式 $|A|$ の値が 2 のとき, 次の値を求めよ. ただし ${}^tA$ は A の転置行列を表す. (各1点)

(1) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(2) $|{}^tA| = |A| = 2$

(3) $|-A| = (-1)^3|A| = -|A| = -2$

(4) $|A^6\cdot({}^tA)^4\cdot A^{-5}| = |A|^6\cdot|{}^tA|^4\cdot|A^{-1}|^5 = 2^6\cdot 2^4\cdot 2^{-5} = 2^{6+4-5} = 2^5 = 32$

ポイント!

n 次行列 A, B に対し,

- $|AB| = |A||B|$
- ${}|{}^tA| = |A|$
- A が逆行列を持たない $\Longleftrightarrow |A|=0$
- $|A^k| = |A|^k$
- $|A|\neq 0$ のとき, $|A^{-1}| = 1/|A|$
- $|-A| = (-1)^n|A|$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la1.html