

1] 次の行列式を計算せよ. (各 1 点)

$$(1) \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(4 \times (-1) - 3 \times 1) = -21$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{3}-2 \times \textcircled{1} \\ \textcircled{4}+\textcircled{1} \end{matrix}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2}-\textcircled{1} \\ \textcircled{3}+\textcircled{1} \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 = 4$$

2] 4 次行列 $A = (a_{ij})$ の行列式は $|A| = \sum_{\varphi} \text{sgn}(\varphi) a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} a_{3\varphi(3)} a_{4\varphi(4)}$ により定義される. (ただし和 Σ は 1, 2, 3, 4 からなる長さ 4 の順列 $\varphi = (\varphi(1) \varphi(2) \varphi(3) \varphi(4))$ (全部で 24 個ある) に関する和を取る.)

(1) 順列が $\varphi = (2 \ 4 \ 3 \ 1)$ のときの、符号 $\text{sgn}(\varphi)$ を求めよ. (1 点)

φ の転倒数は,

$$\varphi = (2 \ 4 \ 3 \ 1) \rightarrow (2 \ 4 \ 1 \ 3) \rightarrow (2 \ 1 \ 4 \ 3) \rightarrow (1 \ 2 \ 4 \ 3) \rightarrow (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

より 4 に等しく, φ は偶順列である. 従って, $\text{sgn}(\varphi) = 1$.

(2) (1) の φ と $A = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \textcircled{5} \\ 3 & 4 & \textcircled{5} & 6 \\ \textcircled{4} & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ に対し, $\text{sgn}(\varphi) a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} a_{3\varphi(3)} a_{4\varphi(4)}$ の値を求めよ. (1 点)

$$\text{sgn}(\varphi) a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} a_{3\varphi(3)} a_{4\varphi(4)} = \text{sgn}(\varphi) a_{12} a_{24} a_{33} a_{41} = 1 \times 2 \times 5 \times 5 \times 4 = 200$$