線形代数 1, 第 8 回小テスト解答

2015/10/19 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列を行基本変形により, 階段行列に変形し, 階数を求めよ. (2 点)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-5\times②} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

よって A の階数は 3 ($\operatorname{rank} A = 3$).

$\boxed{2}$ 次の連立 1 次方程式の解の個数がどのようになっているか調べよ.
答えは「1：解無し」,「2：解は無限個ある」,「3：解は唯一」の 3 つの中から選択せよ. (各 1 点)

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

第 2 式が $0x + 0y + 0z = 3$ より矛盾. 従って「解無し」.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{③+3\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③+4\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

変数の数は 3 個であり, 一方係数行列の階数は 2 に等しい. よって「解は無限個ある」.

(3) $$\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

変数の数は 4 個. (拡大) 係数行列の階数は 3. 従って「解は無限個ある」.

ポイント!

一般に係数行列が横長 ($m \times n$ 行列で $m < n$) のとき, 解が存在すれば無限個ある.

---

[0] ※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la1.html