線形代数1, 第2回小テスト解答

2015/9/28 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列の積を計算せよ. ただし, 積が定義されないときは「定義されない」と答えよ (各1点)：

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0+0\times 1 & 1\times 2+0\times(-3) & 1\times 1+0\times 2 \\ 2\times 0+1\times 1 & 2\times 2+1\times(-3) & 2\times 1+1\times 2 \\ -1\times 0+1\times 1 & -1\times 2+1\times(-3) & -1\times 1+1\times 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 1+1\times 3+2\times 1 & 0\times 2+1\times(-1)+2\times 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$: 定義されない

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, A^3+A^2+A+E を求めよ. ただし, E は2次の単位行列とする. (1点)

(解1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &A^3+A^2+A+E \\ =&\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(解2)

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$\begin{aligned} &A^2-(1-1)A+(1\times(-1)-1\times(-2))E \\ =&A^2+E \\ =&O. \end{aligned}$$

よって $A^2=-E$.

従って

$$\begin{aligned} &A^3+A^2+A+E \\ =&(-E)A+(-E)+A+E \\ =&O \end{aligned}$$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la1.html