

期末テスト準備問題

[1] (1) 次の連立合同方程式を解け.

$$(a) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv -4 \pmod{9} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x \equiv -1 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x \equiv -6 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{5} \\ x \equiv -5 \pmod{9} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 連立合同方程式 } \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases} \text{ の全ての解を求めよ.}$$

[2] 次の体の拡大 L/K の拡大次数 $[L : K]$ を求めよ.

$$(1) L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}), K = \mathbb{Q}$$

$$(2) L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}), K = \mathbb{Q}$$

$$(3) L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}), K = \mathbb{Q}$$

$$(4) L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}), K = \mathbb{Q}$$

[3] 次の元 α の有理数体 \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

$$(1) \alpha = -3 + \sqrt{5}$$

$$(2) \alpha = \frac{11 - \sqrt{61}}{6}$$

$$(3) \alpha = \frac{-1 + \sqrt[3]{2}}{2}$$

$$(4) \alpha = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

[4] 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \text{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ.
また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

$$(1) f(x) = x^2 - 2x - 1, g(x) = x^3 - x - 1$$

$$(2) f(x) = x^3 + x^2 - x + 2, g(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$$

[5] 有理数体 \mathbb{Q} の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし,
多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

$$(1) \alpha = \sqrt{3} + 1, \quad f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - 3}$$

$$(2) \alpha = -2 + \sqrt{3}, \quad f(\alpha) = \frac{-\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$$

$$(3) \alpha = \sqrt[3]{3}, \quad f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha}$$

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/fg.html>

略解：

- [1] (1) (a) $x \equiv 23 \pmod{45}$
(b) $x \equiv 47 \pmod{84}$
(c) $x \equiv 42 \pmod{104}$
(d) $x \equiv 103 \pmod{180}$
(2) $x \equiv 14 \pmod{18}$

- [2] (1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 12

- [3] (1) $f_\alpha(x) = x^2 + 6x + 4$ (2) $f_\alpha(x) = 3x^2 - 11x + 5$ (3) $f_\alpha(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x - 1$
(4) $f_\alpha(x) = x^4 - 60x^2 + 36$

- [4] (1) $d(x) = 1, a(x) = \frac{1}{7}(-4x^2 + x + 2), b(x) = \frac{1}{7}(4x - 9)$
(2) $d(x) = x + 2, a(x) = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x + 4), b(x) = \frac{x}{2}$

- [5] (1) $\frac{2}{11}\alpha - \frac{3}{11}$ (2) $\frac{1}{11}\alpha + \frac{7}{11}$ (3) $\frac{1}{12}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}$