期末試験問題

- 問題文を良く読み, 解答を別紙「解答用紙」に記入しなさい.
- 答えには下線をひく などし, わかりやすくすること.

$\boxed{1}$ 次の連立合同方程式を解け. ただし答えは $x \equiv a \mod n$ の形に表すこと.

(1) $\begin{cases} x \equiv -3 \mod 9 \\ x \equiv 10 \mod 16 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv -3 \mod 5 \\ x \equiv 4 \mod 11 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 18 \\ x \equiv 9 \mod 24 \end{cases}$

$\boxed{2}$ 次の体の拡大 L/K の拡大次数 $[L:K]$ を求めよ.

(1) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$, $K = \mathbb{Q}$

(2) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$, $K = \mathbb{Q}$

(3) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2})$, $K = \mathbb{Q}$

$\boxed{3}$ 次の元 α の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

(1) $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ (2) $\alpha = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 多項式 $f(x) = x^4 + x + 2$ と $g(x) = x^2 + 1$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \mathrm{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ. また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

$\boxed{5}$ 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = 2 - 2\sqrt{2}$, $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2 + \alpha + 1}$

(2) $\alpha = \sqrt[3]{3}$, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$

(3) α は方程式 $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の解 (の一つ), $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/fg.html

略解：

$\boxed{1}$ (1) $x \equiv 42 \mod 144$ (2) $x \equiv 202 \mod 220$ (3) $x \equiv 57 \mod 72$

$\boxed{2}$ (1) 3 (2) 4 (3) 8

$\boxed{3}$ (1) $f_\alpha(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ (2) $f_\alpha(x) = x^4 - 70x^2 + 361$

$\boxed{4}$ $d(x) = 1, \quad a(x) = \frac{1}{10}(-x+3), \quad b(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - x + 4)$

$\boxed{5}$ (1) $\frac{-\alpha+5}{9}$ (2) $\frac{1}{10}(3\alpha^2 + \alpha - 3)$ (3) $-\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha$