中間レポート問題

- 裏面の注意を良く読んだ上で, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2015 年 12 月 14 日 (月)16:00** までに理学部事務室のレポートボックスに提出しなさい.

$\boxed{1}$ (1) 次の連立合同方程式を解け.

(a) $\begin{cases} x \equiv 5 \mod 9 \\ x \equiv 4 \mod 17 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 4 \\ x \equiv -8 \mod 13 \\ x \equiv 9 \mod 15 \end{cases}$

(2) 整数 a, b に対し, 連立合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv a \mod 4 \\ x \equiv b \mod 10 \end{cases} \tag{$\heartsuit$}$$

を考える.

(c) ($\heartsuit$) の解が存在する為の必要十分条件を a, b を用いて表せ. (単に条件を求めるだけでなく, 求めた条件が ($\heartsuit$) の解が存在するために必要かつ十分であることも示すこと.)

(d) 前問で求めた条件のもとで, ($\heartsuit$) の全ての解を求めよ.

$\boxed{2}$ $f : G \longrightarrow G'$ を群の準同型写像とし, G' の部分群 H に対し,

$$f^{-1}(H) = \left\{ a \in G \;\middle|\; f(a) \in H \right\}$$

を H の f による逆像とする.

(1) $f^{-1}(H)$ が G の部分群になることを示せ.

(2) H が G' の正規部分群ならば, $f^{-1}(H)$ が G の正規部分群になることを示せ.

$\boxed{3}$ 2 元体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ の元を成分とする 2 次正則行列全体

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad ad - bc \equiv 1 \mod 2 \right\}$$

は, 演算

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 \mod 2 & a_1b_2 + b_1d_2 \mod 2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 \mod 2 & c_1b_2 + d_1d_2 \mod 2 \end{pmatrix}$$

に関して群 (乗法群) になる.

(1) G の元を全て求めよ.

(2) G の群表を計算せよ. (G の元に適当に名前を付けて答えよ.)

(3) G の各元の位数を求め, G と同型な群の例を 1 つ挙げよ.

(4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, M で生成される G の部分群 $\left\{ M^n \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$ を H とする. 商群 G/H が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であることを示せ.

問題は裏面にもあります.

$\boxed{4}$ (1) $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}[\omega]$ を示せ. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根, すなわち $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2$ とする.

(2) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(a) $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, \quad f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha-3}$

(b) $\alpha = \sqrt[3]{3}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2-1}$

注意点 (良く読んで解答すること)

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したもの写させたものを問わず, 評価を 0 点とする.
- 問題を他の受講者と共同で考え, 解答を作成する場合には, 必ず解答を理解した上で, 自分自身で答案を作成すること. 後日答案内容に関する問合せをする可能性もある.
- 図書・文献・Web などを参照し解答する場合には, 参照した図書やページを明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/fg.html