

中間テスト準備問題

1 次の (不) 定積分を求めよ.

- (1) $\int \frac{dx}{(3-2x)^3}$ (2) $\int \sqrt[3]{x+3} dx$ (3) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{5}}$ (4) $\int 5^x dx$
- (5) $\int (e^{3x} - e^{-3x})^2 dx$ (6) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (7) $\int \frac{4}{1+4x^2} dx$ (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
- (9) $\int \frac{dx}{1+(2x+1)^2}$ (10) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ (11) $\int \left(\frac{x}{2}+5\right)^{-4} dx$
- (12) $\int \frac{dx}{x(\log x)^3}$ (13) $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$ (14) $\int \frac{e^x}{(e^x+5)^2} dx$
- (15) $\int \sin x \cos^5 x dx$ (16) $\int x e^{-2x} dx$ (17) $\int (2x-1) \cos x dx$
- (18) $\int \log(x+1) dx$ (19) $\int (x^2-x)e^x dx$ (20) $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)} dx$
- (21) $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$ (22) $\int x \log x dx$ (23) $\int e^x \sin 3x dx$
- (24) $\int \cos^2 2x dx$ (25) $\int \sin 2x \cos 3x dx$ (26) $\int \sin^3 x dx$
- (27) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} dx$ (28) $\int \sin^2 2x dx$ (29) $\int \frac{\sin x \cos^2 x}{1+\sin x} dx$
- (30) $\int \frac{dx}{\sin x}$ (32) $\int \frac{5x+2}{x^2+2x-8} dx$ (33) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ (34) $\int \frac{2x+5}{x^2+4} dx$
- (35) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ (36) $\int \frac{x(x+3)}{(x+1)(x^2+1)} dx$ (37) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3}$
- (38) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} dx$ (39) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x+2)}$ (40) $\int_0^2 \frac{dx}{-4-3x^2}$

2 (1) 区間 $[0, 1]$ で不等式 $0 \leq \sqrt{1-x^3} \leq 1$ が成り立つことを用いて,

$$0 \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx \leq 1$$

を示せ.

(2) $S = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ の整数部分を求めよ (ただし, $27 = 3^3$).

3 (微分積分学の基本定理)

(1) a が定数のとき, 次の関数を微分せよ.

(a) $F(x) = \int_a^x x \sin t dt$ (b) $F(x) = \int_a^x (x-t)f'(t) dt$

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \sqrt{t^2+1} dt$ を求めよ.

4 (部分積分, 教科書 p.126, 例題 4, 問 4)

(1) $I_n = \int (\log x)^n dx$ とする. 次の等式を証明せよ.

$$I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}, \quad (n \text{ は正の整数})$$

(2) $I_n = \int x^n e^x dx$ とする. $n \geq 1$ として I_n の漸化式を求めよ.

5 「積分の平均値の定理」, すなわち関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b)$$

を満たす ξ が存在することを証明せよ. (教科書 p.149 参照)

6 (1) $S = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{100}$ とする. 不等式 $667 < S < 676$ を証明せよ.

(2) 整数 $n \geq 2, k \geq 1$ に対し, $S = 1 + \frac{1}{\sqrt[2]{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\sqrt[4]{k}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ とする.

$$\frac{n(k^n - k + 1) - 1}{(n-1)k} \leq S \leq \frac{nk^{n-1} - 1}{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 任意の自然数 l に対し, 閉区間 $[l, l+1]$ 上の x に対し,

$$\frac{1}{\sqrt[l+1]{l+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[l]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[l]{l}}$$

が成り立つことを用いる. 講義ノート参照)

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/cal2.html>