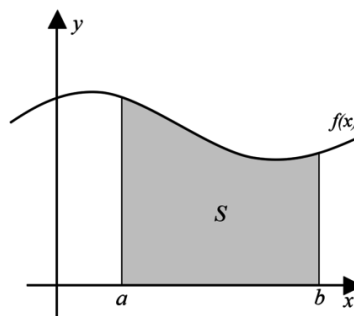


### 2.6 面積と体積

関数  $y = f(x)$  が  $a \leq x \leq b$  の範囲で  $f(x) \geq 0$  のとき,  $x$  軸と  $y = f(x)$  のグラフで囲まれる部分の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

で求められる.  $a \leq x \leq b$  で  $f(x) \leq 0$  の場合には,  $S = - \int_a^b f(x)dx$  で求められる.



例題 2.15. 次の関数  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ. (1)  $f(x) = x(2-x)$   
 (2)  $f(x) = x^2(x-1)$

解) (1)  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積は,  $0 \leq x \leq 2$  の範囲にある (図は省略).

$$S = \int_0^2 x(2-x)dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

(2)  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積は,  $0 \leq x \leq 1$  の範囲にある (図は省略). この部分で  $f(x) \leq 0$  となるので,

$$S = \int_0^1 -x^2(x-1)dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

#### 回転体の体積

$y = f(x)$  のグラフを  $x$  軸を中心に一回転させて得られる回転体の体積は, 次で求められる.

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

例題 2.16.  $y = \sqrt{x^3}$  を  $0 \leq x \leq 3$  の部分を  $x$  軸のまわりに一回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

解)

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{x^3})^2 dx = \pi \int_0^3 x^3 dx = \pi \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{81}{4} \pi.$$

問題 2.17. 次の曲線と  $x$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(1)  $y = x(x + 1)$

(2)  $y = x^2 - 4x + 3$

(3)  $y = x(x - 2)^2$

(4)  $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

問題 2.18. 次の 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1)  $y = -x(x + 2), \quad y = x$

(2)  $y = \sin x, \quad y = \frac{2}{\pi}x \quad (x \geq 0)$

(3)  $y = -\frac{4}{x}, \quad y = x - 5$

問題 2.19. 次の曲線を  $x$  軸の周りに一回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

(1)  $y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$

(2)  $y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (1 \leq x \leq 2)$

(3)  $y = \cos 2x \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$

\*※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/bmb.html>