

## 2.3 置換積分

次の公式は、微分における合成関数の微分を積分に応用したものである。

置換積分の公式

$u = f(x)$  とおくと、

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)du$$

例題 2.5. 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (2x+1)^5 dx \quad (2) \int \frac{x^2}{x^3+2} dx$$

解答) (1)  $u = 2x+1$  とおけば,  $\frac{du}{dx} = 2$ . したがって,  $du = 2dx$ , すなわち  $dx = \frac{1}{2}du$ .

$$\int (2x+1)^5 dx = \int u^5 \left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{2} \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C.$$

(2)  $u = x^3+2$  とおけば,  $\frac{du}{dx} = 3x^2$ . したがって,  $x^2 = \frac{1}{3} \frac{du}{dx}$ .

$$\int \frac{x^2}{x^3+2} dx = \int \frac{1}{u} \left(\frac{1}{3} \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \int u^{-1} du = \frac{1}{3} \log |u| + C = \frac{1}{3} \log |x^3+2| + C.$$

## 2.4 部分積分

次の公式は、微分における「積の微分」を積分に応用したものである。

部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

例題 2.6. 次の不定積分を求めよ： $\int x \cos x dx$

解答)

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int x' \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

問題 2.7 (置換積分). 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \left(\frac{1}{3}x - 2\right)^5 dx$$

$$(4) \int \frac{1}{2x-1} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx$$

$$(5) \int \sin^5 x \cos x dx$$

$$(3) \int \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$(6) \int \tan x dx$$

問題 2.8 (置換積分). 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int x\sqrt{x^2-1} dx$$

$$(4) \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2}{x^3-1} dx$$

$$(5) \int \frac{1}{x \log x} dx$$

$$(3) \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$(6) \int xe^{\frac{1}{2}x^2} dx$$

問題 2.9 (部分積分). 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int xe^{2x} dx$$

$$(4) \int x^3 \log x dx$$

$$(2) \int x \sin 2x dx$$

$$(5) \int \log x dx$$

$$(3) \int x \cos 3x dx$$

$$(6) \int \frac{\log x}{x} dx$$