

2 積分

2.1 不定積分

関数 $f(x)$ に対し, 微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という. 原始関数は $f(x)$ に対したくさんあるが, その中のひとつを $F(x)$ として, すべて $F(x) + C$ (C は定数) の形に表すことができる. このことを

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と書き表し, $\int f(x)dx$ を $f(x)$ の不定積分という (C は積分定数と呼ばれる).

2.2 不定積分の基本計算

積分の計算では, 微分のときと同様に様々な公式が使われる.

—— 不定積分の性質 ——

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

—— 単項式の不定積分 ——

$$\begin{aligned} \bullet \int 1dx &= x + C & \bullet \int x^{-1}dx &= \log|x| + C \\ \bullet \int x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \bullet \int x^{\frac{n}{m}} dx &= \frac{1}{\frac{n}{m} + 1}x^{\frac{n}{m} + 1} + C \end{aligned}$$

—— 三角関数と指数関数の不定積分 ——

$$\begin{aligned} \bullet \int \sin x dx &= -\cos x + C & \bullet \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \bullet \int \cos x dx &= \sin x + C & \bullet \int e^x dx &= e^x + C \end{aligned}$$

—— 三角関数と指数関数の不定積分 2 ——

$$\begin{aligned} \bullet \int \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \cos ax + C & \bullet \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C \\ \bullet \int \cos ax dx &= \frac{1}{a} \sin ax + C \end{aligned}$$

問題 2.1. 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 \right) dx$$

$$(4) \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int \frac{2}{x^2} dx$$

$$(5) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(3) \int x\sqrt{x} dx$$

問題 2.2. 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{3\cos^2 x} dx$$

$$(2) \int \left(2e^x - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$(3) \int \left(\frac{1}{3x} - 3x \right) dx$$

問題 2.3. 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{3} \right) dx$$

$$(2) \int \frac{2}{e^x} dx$$

$$(3) \int \cos \frac{\pi}{4} x dx$$

問題 2.4. 次の不定積分を求めよ. (ヒント：半角の公式)

$$(1) \int \cos^2 x dx$$

$$(2) \int \cos^2 \frac{x}{3} dx$$