1.6 2 階導関数

関数 $y = f(x)$ が微分可能で, さらにその導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき, $f'(x)$ の導関数 $(f'(x))'$ を $f(x)$ の **2 階導関数**または **2 次導関数**といい, 記号

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

などで表す.

例 **1.13.** $y = e^{-x^2}$ のとき, 合成関数の微分により $y' = -2xe^{-x^2}$.

$$y'' = (-2x)' e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

1.7 関数の増減・凹凸とグラフ

導関数の値により, 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描く. まずグラフを描くのに必要な事項を整理する.

関数の増減とグラフの凹凸

(1)
- $f'(p) > 0 \Longrightarrow f(x)$ は $x = p$ で増加
- $f'(p) < 0 \Longrightarrow f(x)$ は $x = p$ で減少

(2) $y = f(x)$ が $x = p$ で極値をとる. $\Longrightarrow f'(p) = 0$.

(3)
- $f''(p) > 0 \Longrightarrow f(x)$ は $x = p$ で下に凸
- $f''(p) < 0 \Longrightarrow f(x)$ は $x = p$ で上に凸

関数 $y = f(x)$ のグラフは以下の手順に従って描く.

グラフを描く手順

1. y', y'' を求める.
2. $y' = 0$, $y'' = 0$ となる x の値をそれぞれ求め, 増減表に記入する.
3. $y' = 0$, $y'' = 0$ となる x 以外の x で y', y'' の $+, -$ を調べ, y', y'' の欄にそれぞれ記入する.
4. y の欄に $y' > 0$ なら $\nearrow$ を, $y' < 0$ なら $\searrow$ を記入する. ($y'' > 0$ ならまたはを, $y'' < 0$ ならまたはを記入しても良い.)
5. $y' = 0, y'' = 0$ となる点が, 極大点, 極小点, 変曲点になっているかどうかについて調べる. y の値も求める.
6. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ などを調べる.
7. その他, x 軸や y 軸との交点の座標を求める.
8. 増減表を見ながらグラフを描く.

例題 1.14. 増減表を用いて関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ のグラフの概形を描け. また極大点, 極小点, 変曲点の座標を求めよ.

解)　手順に沿って, 求める.

1. $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. $y'' = 6x - 12 = 6(x-2)$.
2. $y' = 0$ のとき, $x = 1, 3$. $y'' = 0$ のとき, $x = 2$.
3. $x < 1, 3 < x$ のとき, $y' > 0$. $1 < x < 3$ のとき $y' < 0$ である. また, $x > 2$ のとき, $y'' > 0$. $x < 2$ のとき $y'' < 0$ である.
4. 増減表 (表 1) に y の増減に関する矢印を記入.
5. $x = 1$ のとき, $y = 1 - 6 + 9 = 4$. $\cdots$ 極大点
   $x = 2$ のとき, $y = 8 - 24 + 18 = 2$. $\cdots$ 変曲点
   $x = 3$ のとき, $y = 27 - 54 + 27 = 0$. $\cdots$ 極小点

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

表 1: 増減表

6. $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$. $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$.
7. $y = 0$ のとき, $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2 = 0$. 従って $x = 0, 3$. $x = 0$ のとき, $y = 0$.

以上により, 関数 y のグラフは以下の図 1 のようになる.

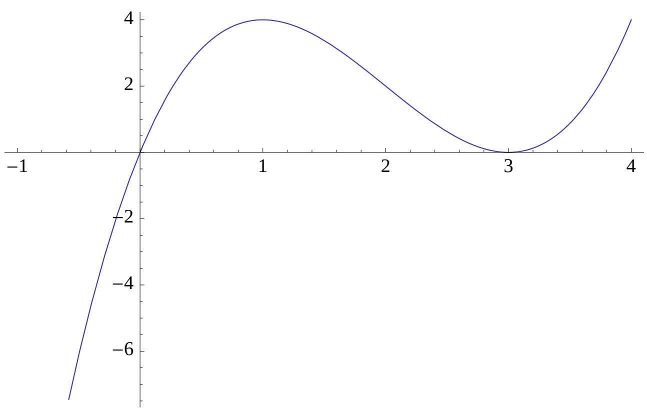

図 1: 関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ のグラフ

以上より, 極大点 $(1, 4)$, 極小点 $(3, 0)$, 変曲点 $(2, 2)$ となる.

問題 1.15. 次の関数の 2 階導関数を求めよ.

(1) $y = x^2 + 1$

(2) $y = e^{-x}$

(3) $y = \sin 2x$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(5) $y = x \sin x$

(6) $y = x^2 e^x$

(7) $y = x \log x$

問題 1.16. 増減表を用いて, 次の関数のグラフの概形を描け. 極大点, 極小点, 変曲点が存在する場合には, それら点の座標を求めよ.

(1) $y = 1 - 3x^2 - 2x^3$

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

問題 1.17. 増減表を用いて, 次の関数のグラフの概形を描け. 極大点, 極小点, 変曲点が存在する場合には, それら点の座標を求めよ.

(1) $y = x^3 - 3x$

(2) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x$

(3) $y = x^4 - 4x^3$

(4) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$

※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/bmb.html