

1.5 合成関数の微分 2

前回の復習 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $y = f(g(x))$ の形の関数は f と g の合成関数と呼ばれ, 次の合成関数の微分により, 微分が求められる.

——— 合成関数の微分 ———

関数 $y = f(g(x))$ のとき, $u = g(x)$ とおくと, $y = f(u)$.

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{または} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

平方根 $\sqrt{\quad}$ や $\sqrt[3]{\quad}$ などを含んだ関数は, 指数を用いた形に直してから微分する.

例題 1.9. 次の関数を微分せよ : (1) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ (2) $y = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

解)

(1) $u = x^2 + x + 1$ とおけば, $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$. 合成関数の微分より,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x + 1) = \frac{1}{2\sqrt{u}} (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

(2) $u = x^2 + 1$ とおけば, $y = \frac{1}{u\sqrt{u}} = u^{-\frac{3}{2}}$. 合成関数の微分より,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{3}{2} u^{-\frac{3}{2}-1} \cdot (2x) = -3xu^{-\frac{5}{2}} = \frac{-3x}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-3x}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1}}.$$

問題 1.10. 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = (x^2 + x + 1)^7$$

$$(2) y = \cos^5 3x$$

$$(3) y = \log(3x + 4)$$

$$(4) y = \log(3x + 2) + \frac{2}{3x + 2}$$

$$(5) y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(6) y = \log \frac{x + 1}{x - 1}$$

問題 1.11. 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = x\sqrt{x}$$

$$(2) y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$(3) y = \sqrt[3]{x}(x - 1)$$

$$(4) y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$$

問題 1.12. 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$(2) y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$(5) y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(6) y = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$(7) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(8) y = \log(1 + \sqrt{x})$$