1.4　合成関数の微分 1

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $y = f(g(x))$ の形の関数を f と g の合成関数という. 合成関数 $y = f(g(x))$ は, x を 2 つの関数 g と f により続けて順番に写すことで, 値が定義される (順番に注意):

$$x \overset{g}{\longmapsto} u = g(x) \overset{f}{\longmapsto} y = f(u) = f(g(x))$$

例 1.4. 関数 $y = \sin(x^2 - 1)$ は, 2 つの関数 $u = x^2 - 1$ と関数 $y = \sin u$ の合成関数:

$$x \longmapsto u = x^2 - 1 \longmapsto \sin u = \sin(x^2 - 1)$$

合成関数は, 次の公式により微分する.

合成関数の微分

関数 $y = f(g(x))$ のとき, $u = g(x)$ とおくと, $y = f(u)$.

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) \qquad \text{または} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

例題 1.5. 次の関数を微分せよ: (1)　$y = \cos(x^2 + 1)$　　(2)　$y = \dfrac{1}{(1 + e^{x^2})^3}$

解)

(1) $u = x^2 + 1$ とおくと, $y = \cos u$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u) \cdot (2x) = -2x \sin(x^2 + 1).$$

(2) $u = x^2$, $w = 1 + e^u$ とおくと, $y = w^{-3}$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-3w^{-4}) \cdot e^u \cdot 2x = -3(1 + e^{x^2})^{-4} e^{x^2} 2x = \frac{-6xe^{x^2}}{(1 + e^{x^2})^4}.$$

次の公式は合成関数の微分からすぐに導かれる.

合成関数の微分 2

a は定数とする.

$$(\sin ax)' = a \cos ax \qquad (\cos ax)' = -a \sin ax \qquad (e^{ax})' = ae^{ax}$$

問題 1.6. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x^2 - 1)^5$

(2) $y = \sin 3x$

(3) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(4) $y = \sin^3 x$

(5) $y = (\sin x + 1)^4$

(6) $y = e^{3x}$

(7) $y = e^{x^2}$

(8) $y = \log(x^2 + 1)$

(9) $y = (\log x)^2$

(10) $y = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

(11) $y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

(12) $y = \dfrac{1}{\log x}$

問題 1.7. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{3}\cos 6x + \dfrac{1}{2}\sin 4x$

(2) $y = e^{2x} + e^{-x}$

(3) $y = e^{\pi x}$

(4) $y = x^2 \cos 2x$

(5) $y = x^3 e^{2x}$

(6) $y = e^{-x}\cos 3x$

(7) $y = \dfrac{1}{\sin 4x}$

問題 1.8. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)$

(2) $y = \sin 3x - 3x\cos 3x$

(3) $y = e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$

(4) $y = \dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}$

※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/bmb.html