

## 第2回レポート問題

- 裏面の注意を良く読んだ上で、以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ、2015年7月7日(火)16:00までに理学部事務室のレポートボックスに提出しなさい。

1  $S_3$  を3変数  $X, Y, Z$  に関する実係数斉次3次多項式

$$F = a_0X^3 + a_1X^2Y + a_2XY^2 + a_3Y^3 + a_4X^2Z + a_5XYZ + a_6Y^2Z + a_7XZ^2 + a_8YZ^2 + a_9Z^3,$$

$a_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, 9$ ) 全体のなすベクトル空間 ( $S_3 \simeq \mathbb{R}^{10}$ ) とする。

(1) 射影3次曲線  $C : F = 0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  が、8点  $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (0, 0, 1), P_4 = (0, 1, 1), P_5 = (1, 0, 1), P_6 = (1, 1, 0), P_7 = (1, 1, 1), P_8 = (1, 2, 3)$  を通るとき、 $F$  の係数  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 9$ ) の満たす条件を求めよ。

(2) 前問の  $F$  の係数の連立方程式を解いて、 $S_3$  の部分空間

$$S_3(P_1, \dots, P_8) = \{F \in S_3 \mid F(P_j) = 0, \quad j = 1, \dots, 8\}$$

の基底を1組与えよ。

2 アフィン3次曲線  $C_0 : y^2 = x^3 + 17 \subset \mathbb{R}^2$  (射影3次曲線  $C : Y^2Z = X^3 + 17Z^3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ) に対し、無限遠点  $O = (0, 1, 0)$  を単位元とする  $C$  の群法則を定める。以下の点 ( $\in \mathbb{R}^2$ ) の座標を求めよ。

- (1)  $P(-2, 3), Q(-1, 4), P + Q$
- (2)  $P(-2, 3), Q(2, 5), P + Q$
- (3)  $P(-2, 3), 2P$
- (4)  $P(-2, 3), Q(2, 5), -2P + Q$

3 アフィン3次曲線  $C_0 : y^2 = x^3 + px + q \subset \mathbb{R}^2$  (射影3次曲線  $C : Y^2Z = X^3 + pXZ^2 + qZ^3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ) に対し、無限遠点  $O = (0, 1, 0)$  を単位元とする  $C$  の群法則を定める。点  $P(x_0, y_0) \in C_0$ , ( $y_0 \neq 0$ ) に対し、点  $2P \in C_0$  の  $x$  座標  $x_1$  が

$$x_1 = \frac{x_0^4 - 2px_0^2 - 8qx_0 + p^2}{4y_0^2}$$

で与えられることを示せ。(ヒント:  $P$  における  $C$  の接線の傾きは、 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x_0^2 + p}{2y_0}$  で与えられる。)

4 アフィン3次曲線  $C_0 : y^2 = x^3 + 17 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  とする。

- (1) Mathematica, あるいは、他のプログラミング言語を用いて、与えられた2点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in C_0$  に対し、 $P + Q$  の座標を計算するプログラムを組め。ただし、 $x_1 \neq x_2$  と仮定して良い。
- (2) 同様に、与えられた点  $P(x_0, y_0) \in C_0$  に対し、 $2P$  の座標を計算するプログラムを組め。ただし、 $y_0 \neq 0$  と仮定して良い。
- (3) 上記プログラムを用いて、2の問題の答えを確認せよ。

## 注意点 (良く読んで解答すること)

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したものを写させたものを問わず, 評価を 0 点とする.
- 図書・文献などを参照し解答した場合には, 参照した文献を明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

---

<sup>0</sup>※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/ag.html>