第 1 回レポート問題 (修正版)

- 裏面の注意を良く読んだ上で, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2015 年 6 月 2 日 (火)16:00** までに理学部事務室のレポートボックスに提出しなさい.
- 問題を一部修正しました ($\boxed{3}$(1) と $\boxed{4}$(3)). 修正版を解答してください. (5/20)

$\boxed{1}$ 楕円 $C: 3x^2+y^2=5$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 円 $x^2+y^2=1$ のパラメータ表示を用いて, $x=\dfrac{2\sqrt{5}t}{3t^2+1}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}(3t^2-1)}{3t^2+1}$ が C のパラメータ表示 $\mathbb{R}\to C$ を与えることを示せ.

(2) C 上に $\mathbb{Q}$ 有理点 (x, y 座標がともに有理数の点) が存在しないことを示せ. (ヒント: $3a^2+b^2=5c^2$ を満たす有理数 a, b, c が $(a,b,c)=(0,0,0)$ 以外に存在しないことを示す.)

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ 上の射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ において, 以下の曲線の交点の座標を求めよ. ただし, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ の斉次座標を X, Y, Z とし, 無限遠直線 ℓ_∞ を $(Z=0)$ とする. また交点が存在しないときは, 存在しないことを示せ.

(1) $(X-(\sqrt{2}+1)Y+3Z=0)$ と $((\sqrt{2}-1)X-Y+Z=0)$

(2) $(X^2-3XY+2Y^2+2XZ=0)$ と ℓ_∞

(3) $(X^2+Y^2-Z^2=0)$ と $(X^2+Y^2-4Z^2=0)$

$\boxed{3}$ (1) アフィン平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 次曲線

$$7x^2+6\sqrt{3}xy+y^2+(10\sqrt{3}-4)x+(10+4\sqrt{3})y+12=0$$

に適当な座標変換 (アフィン変換) を施し, 標準形を求めよ.

(2) 射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上の 2 次曲線

$$2X^2+4XY+11Y^2-20XZ+16YZ+5Z^2=0$$

に適当な座標変換 (射影変換) を施し, 標準形を求めよ.

$\boxed{4}$ S_2 を $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次形式全体のなすベクトル空間, すなわち,

$$S_2=\left\{F=aX^2+bXY+cY^2+dXZ+eYZ+fZ^2 \;\middle|\; a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}\simeq\mathbb{R}^6$$

とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上の 2 次曲線 $(F=0)$ が, 4 点 $P_1=(1,1,1), P_2=(0,1,1), P_3=(1,0,1), P_4=(1,1,0)$ を通るとき, F の係数 a,b,c,d,e,f の満たす条件を求めよ.

(2) 前問の F の係数の連立方程式を解いて, S_2 の部分空間

$$S_2(P_1,P_2,P_3,P_4)=\left\{F\in S_2 \;\middle|\; F(P_i)=0\right\}$$

の基底を一組与えよ.

(3) s, t をパラメータとする $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上の 2 次曲線,

$$(s(XY-2Y^2+2XZ-YZ)+t(XZ-Y^2)=0)$$

が 2 直線の和に分かれるような射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の点 $(s:t)$ の座標を求め, また 2 直線の定義方程式を求めよ.

注意点 (良く読んで解答すること)

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したもの写させたものを問わず, 評価を 0 点とする.
- 図書・文献などを参照し解答した場合には, 参照した文献を明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/ag.html