# 数学特論 V/数学特別講義 V, レポート問題

2015/11.30-12.4 担当：那須

- 以下の問題と講義ノートのレポート問題を合わせた問題の中から2問を選択し, 解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2016 年 1 月 8 日 (金)16:00** までに数学科事務室のレポートボックスに提出しなさい.

$\boxed{1}$ $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とする. $H$ を $S$ の超平面切断とし, $L$ を $S$ 上の直線とする. $S$ 上の因子 $D$ を $D := 4H + L$ で定める.

(1) $D$ は非常に豊富 (very ample) な因子であることを示せ. (ヒント：3 次曲面上の因子 $D$ に対し, 「$D$ が豊富 $\Longleftrightarrow$ $D$ が非常に豊富」が成り立つ. )

(2) $D$ によって張られる $S$ 上の完備線形系 $|D|$ の一般元を $C$ とする. 曲線 $C$ の次数と種数を求めよ.

(3) コホモロジー群 $H^0(S, \mathcal{O}_S(C))$, および $H^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3})$ の次元 (すなわち $h^0(S, \mathcal{O}_S(C))$, および $h^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3})$) を計算せよ.

(4) $\mathcal{W}$ をある 3 次曲面 $S$ に含まれ, $S$ 上のある直線 $L$ に対し, $C \sim 4H + L$ となるような非特異曲線全体のなす族, すなわち

$$\mathcal{W} = \left\{ C \subset \mathbb{P}^3 \;\middle|\; C \subset {}^{\exists}S \quad (\text{非特異 3 次曲面}), \qquad C \sim 4H + L, \quad L \text{ は } S \text{ 上の直線} \right\}$$

とする. $\mathcal{W}$ の次元を求めよ.

(5) $\mathbb{P}^3$ のヒルベルトスキーム $\operatorname{Hilb}\mathbb{P}^3$ が点 $[C]$ において非特異であるかどうかについて決定せよ.

$\boxed{2}$ $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とする. $H$ を $S$ の超平面切断とし, $L_1$, $L_2$ を $S$ 上の互いに交わりを持たない 2 本の直線とする. $S$ 上の因子 $D$ を $D := 4H + L_1 + 2L_2$ で定める. 前問$\boxed{1}$の問題 (1),(2),(3),(4) をこの場合に考えよ. (ヒント：$H.L_1 = H.L_2 = 1, L_1.L_2 = 0, -K_S = H$ を用いて計算する. )

$\boxed{3}$ $d = 15, g = 27$ のとき,

$$b_1 \geq \ldots \geq b_6, \qquad \text{かつ} \qquad a \geq b_1 + b_2 + b_3 \tag{1}$$

と

$$d = 3a - \sum_{i=1}^{6} b_i, \quad \text{かつ} \quad g = \frac{(a-1)(a-2)}{2} - \sum_{i=1}^{6} \frac{b_i(b_i - 1)}{2} \tag{2}$$

を満たし, なおかつ $b_6 \geq 0$ (ネフ性) と $a > b_1$ (連結性) を満たすような 7 整数の組 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ を求めよ. (すなわち, 非特異 3 次曲面 $S \simeq \operatorname{Bl}_{6pts}\mathbb{P}^2$ 上の非特異連結曲線 $C$ の, 次数と種数がそれぞれ $d = 15$ と $g = 27$ に等しいとき, $C$ の $\operatorname{Pic} S$ における因子類 $[C]$ の標準基底に関する座標が決定される.)

---

[0] $\boxed{1}$,$\boxed{2}$の解答作成にあたっては, 講義ノート pp.27–29 を参照してください. $\boxed{3}$については, 講義ノートレポート問題 3.32 を参照してください.