# 工科の線形代数 2, 行列式の対角化可能性について【補足】

2015/1/8 担当：那須

前回までの講義の中で正方行列 $A$ に対し, 固有値・固有ベクトルを用いて正則行列 $P$ でもって $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを選ぶ方法 (すなわち行列の対角化) について学んだ. しかし, 一般に行列の中には対角化ができないものが存在する.

**例 1** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $|A - \lambda E| = (\lambda - 2)^2$ に等しく $\lambda = 2$ (重解) が唯一の固有値となる.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

固有ベクトルは, $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, $\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ となる.

固有値 $\lambda = 2$ (重解) に対する固有ベクトルが "1 本しか" 取れないので, これまでに習った方法では正則行列 $P$ でもって, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるものが得られない (すなわち行列 $A$ を対角化できない). 実は, 行列 $A$ の対角化可能性について以下の事実が知られている.

**行列の対角化可能性**

$n$ 次正方行列 $A$ の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n(\lambda - a_1)^{m_1} \dots (\lambda - a_k)^{m_k}, \qquad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき,

$$A \text{ が対角化可能} \iff \text{各 } i = 1, \dots, k \text{ について } n - \mathrm{rank}(A - a_iE) = m_i$$

が成り立つ.

行列 $A$ が対角化可能かどうか知るには, 固有多項式の重根 $\lambda = a_i$ (重複度 $m_i$) に対し,

$$n - \mathrm{rank}(A - a_iE) = m_i$$

が成り立つかどうかを調べればよい.

**例題 2** 次の行列 $A$ が対角化可能かどうかについて答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解答)

(1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -9 \\ 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 5) - (-9) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$

固有多項式が重根 $\lambda = 2$ (重複度 2) を持つ. $A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$2 - \mathrm{rank}(A - 2E) = 2 - 1 = 1 \neq 2 \text{ (重複度)}.$$

よって, 対角化不可能.

(2) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-5) - 2^2 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6).$

$A$ は相異なる固有値 $\lambda = 1, 6$ を持つので対角化可能.

(3) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2).$

固有多項式が重根 $\lambda = -1$ (重複度 2) を持つ. $A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$3 - \mathrm{rank}(A+E) = 3 - 1 = 2 \text{ (重複度)}.$$

よって対角化可能.

(4) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$

固有多項式が重根 $\lambda = 1$ (重複度 2) を持つ. $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$3 - \mathrm{rank}(A-E) = 3 - 2 = 1 \neq 2 \text{ (重複度)}.$$

よって対角化不可能.

**例題 3** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+a \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能となるような定数 $a$ の値を全て求めよ.

**解答)** $A$ の固有値は $\lambda = 2$ (重解) と $\lambda = 3$ に等しい. $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+a \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2+a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ が対角化可能であるためには, $3 - \mathrm{rank}(A - 2E) = 2$, すなわち $\mathrm{rank}(A - 2E) = 1$ が必要十分である. 従って

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (2+a) \times 1 = -1 - a = 0$$

以上より $a = -1$.

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html