線形代数１の復習

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 次の行列を計算せよ. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(1) AB

(2) BA

(3) ${}^tA + B$

$\boxed{2}$ 次の連立１次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x + y - z &= 3 \\ 2x + 3y - z &= 8 \\ x + 2y + z &= 7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 0 \end{cases}$

$\boxed{3}$ 次の行列 A を行基本変形を用いて階段行列まで変形し, 階数 $(\operatorname{rank} A)$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

略解：$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ (1) $x = 5, y = 0, z = 2$ (2) $x = -t, y = -t, z = t$ (t は定数)
$\boxed{3}$ (1) $A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} A = 1$ (2) $A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} A = 2$ $\boxed{4}$ (1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第１回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 11 & 8 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の x に関する 2 次方程式の解を全て求めよ.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{3}$ (1) 次の 2 つの平面ベクトルによって張られる平行四辺形の面積 (≥ 0) を求めよ.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) 次の 3 つの空間ベクトルによって張られる平行六面体の体積 (≥ 0) を求めよ.

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ について, 次の項の符号を求めよ.

(1) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

(2) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$

(3) $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$

略解：$\boxed{1}$ (1) -14 (2) 125 (3) -1 (4) -42 (5) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ $\boxed{2}$ $x = -1, 3$ $\boxed{3}$ (1) (a) 26 (b) 19 (2) (c) 25 (d) 0 $\boxed{4}$ (1) 1 (2) -1 (3) -1

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 2 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 次の式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & a \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ a & b & 0 & d \\ 11 & 12 & 0 & 14 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1000 & 2000 & 3000 \\ 0.001 & -0.002 & 0.003 \\ 5 & 10 & 25 \end{vmatrix}$

略解：$\boxed{1}$ (1) 0 (2) 0 (3) 16 (4) 1 (5) 112 (6) -40

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 3 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の行列式を因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$\boxed{3}$ x に関する次の方程式を解け.

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

解答：$\boxed{1}$ (1) 0 (2) 255 (3) 52 (4) 2　$\boxed{2}$ (1) $8abcd$ (2) $(a-b)(b-c)(c-a)$　$\boxed{3}$ (1) $x=-1, x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (2) $x=-1$ (重解), $x=2$

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 4 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ を計算せよ.

(2) A の (i, j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を全て求めよ.

(3) B を (i, j) 成分が Δ_{ij} に等しい行列とする. 次の行列を計算せよ. ただし ${}^tB$ は B の転置行列を表す.

(a) $A({}^tB)$

(b) $({}^tB)A$

(4) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の行列式を求めよ．ただし, 文字を含むものは因数分解して答えよ．

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 20 & 70 & 80 & 0 \\ 0.4 & 1.4 & 0 & 0.6 \\ 10 & 25 & 5 & 35 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

解答: $\boxed{1}$ (1) 13 (2) $(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 12 \\ -6 & 4 & -9 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ (3-a) $\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ (3-b) $\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ (4) $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 12 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ (1) -15 (2) -7 (3) -422 (4) $a(b-a)(c-b)(d-c)$

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 5 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) A の余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を全て求めよ.

(3) A の逆行列を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ. もし, 逆行列が存在しない場合には「逆行列は存在しない」と答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

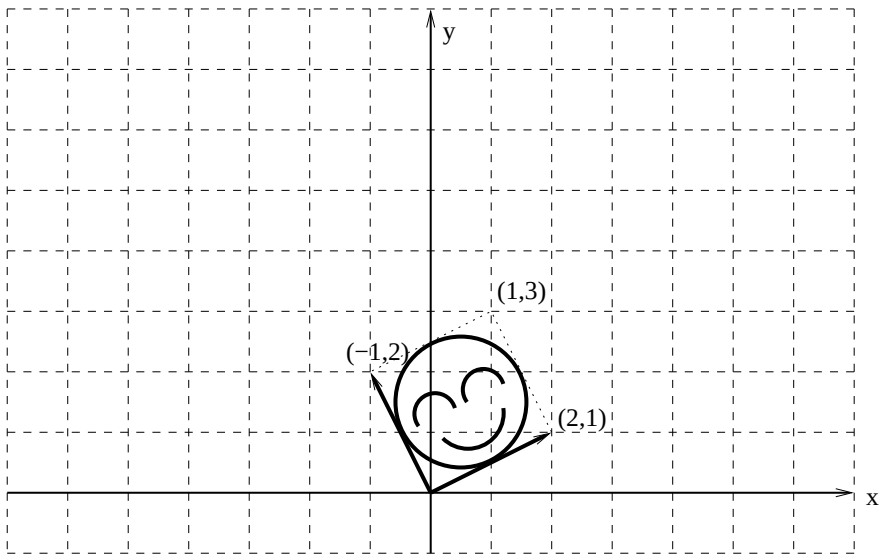
解答: $\boxed{1}$ (1) 20 (2) $(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -23 & 17 & 13 \\ 11 & -9 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -23 & 11 & 2 \\ 17 & -9 & 2 \\ 13 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ (1) 逆行列は存在しない (2) $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ (3) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
(4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (5) 逆行列は存在しない

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 6 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 |

$\boxed{1}$ 2 次正方行列 A が $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ を満たすとする．このとき A の定める写像 $T:\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}$ により、下の図形（ニコニコマーク）はどのような図形に写されるか？概形を描け．



$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対し, 固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.

解答：$\boxed{1}$ 略　$\boxed{2}$ (1) $\Phi_A(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+5$, $\lambda=5,1$. (2) $\lambda=5$ のとき $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $c_1\neq 0$. $\lambda=1$ のとき $\mathbf{x}=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $c_2\neq 0$.　$\boxed{3}$ (1) $\lambda=5,-3$. $\lambda=5$ のとき $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $c_1\neq 0$. $\lambda=-3$ のとき $\mathbf{x}=c_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $c_2\neq 0$.　(2) $\lambda=4,-3$. $\lambda=4$ のとき $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $c_1\neq 0$. $\lambda=-3$ のとき $\mathbf{x}=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $c_2\neq 0$.　(3) $\lambda=5,1,0$. $\lambda=5$ のとき $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\4\\11\end{pmatrix}$, $c_1\neq 0$. $\lambda=1$ のとき $\mathbf{x}=c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $c_2\neq 0$. $\lambda=0$ のとき $\mathbf{x}=c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $c_3\neq 0$.

$\boxed{3}$ 次の行列 A に対し, 固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 7 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 次の行列 A に対し, 固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答：$\boxed{1}$ (1) $\lambda = -2, 4$. $\lambda = -2$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = 4$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. (2) $\lambda = 4, -1$. $\lambda = 4$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = -1$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. (3) $\lambda = 0, 1, 2$. $\lambda = 0$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_3 \neq 0$. (4) $\lambda = 1, 2, 3$. $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. $\lambda = 3$ のとき, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_3 \neq 0$. (5) $\lambda = 2, -1$(重解). $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = -1$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ただし c_2, c_3 は同時に 0 とならない.

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 8 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 次の行列 A を対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ n を整数とする．次の行列 A のべき乗 A^n を計算せよ．ただし, (2) については, 問題$\boxed{1}$で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解答：$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ (1) $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (2) $A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\cdot 5^n + 2(-3)^n & 5^n - (-3)^n \\ 4\cdot 5^n - 4(-3)^n & 2\cdot 5^n + 2(-3)^n \end{pmatrix}$ (3) $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & 0 & -(-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 2 & -2 + (-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 0 & (-2)^n + 4^n \end{pmatrix}$

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html

第 9 回演習問題

学番 | | | | | | | | |　氏名 | |

$\boxed{1}$ 次の行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. なお答えは, 「$P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること. (括弧の中には行列が入る.)

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ n を整数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のべき乗 A^n を計算せよ. ただし, 問題$\boxed{1}$で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い.

$\boxed{3}$ (1) n 次正方行列 A の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \dots (\lambda - a_k)^{m_k}, \qquad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が <u>可能でないもの</u> を <u>全て</u> 選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

答 $\boxed{}$

解答：$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^n & 2+(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$ $\boxed{3}$ (1) 各 $i = 1, \dots, k$ について $n - \mathrm{rank}(A - a_i E) = m_i$ が成り立つ. (2) (1), (3), (6), (8)

この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/lae2.html