代数学序論, 中間テスト準備問題

2014/11/17 担当：那須

以下では $n \geq 2$ は自然数, S_n は n 次対称群, A_n は n 次交代群を表す.

$\boxed{1}$ (1) 4 次置換 $\sigma, \tau \in S_4$ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ により定める. 次の置換を計算せよ.

(a) $\tau\sigma$ (b) $\sigma^{-1}\tau$ (c) $\sigma^2\tau\sigma^{-1}$

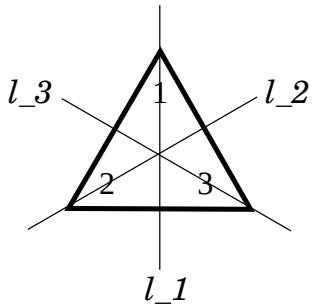
(2) 次の置換を計算せよ. ただし, 答えはサイクルの分離積として表すこと. i, j, k は 3 以上 n 以下の互いに異なる正の整数とする.

(d) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5) \in S_5$

(e) $(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)^2 \in S_5$

(f) $(1\ i\ k)(k\ 2\ j)(k\ i\ 1)(j\ 2\ k) \in S_n$

$\boxed{2}$ 右の基準の正三角形 $\triangle$ を含む平面において, I を恒等変換, R_1 と R_2 を $\triangle$ の中心の周りのそれぞれ角度 120° と 240° の回転 (反時計回り) とし, さらに T_i $(i = 1, 2, 3)$ を, 直線 l_i に関する折り返し (対称移動) とする.

$\Delta =$ 

基準の正三角形 $\triangle$ を次の合成変換で変換した正三角形を求めよ. なお解答は解答欄の三角形の頂点に数字を記入して答えよ. なお合同変換 f に対し f^{-1} は f の逆変換を表すものとする.

(1) $T_2 \circ R_1 \circ T_2$ (2) $T_1 \circ T_3 \circ R_2$ (3) $R_1 \circ T_1 \circ R_2 \circ T_1$

$\boxed{3}$ (1) 次の置換 σ の位数を求めよ.

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 7 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$

(b) $\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(1\ 3\ 8\ 4) \in S_8$

(c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 15 & 13 & 1 & 10 & 3 & 12 & 14 & 2 & 11 & 7 & 8 & 4 & 16 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_{16}$

(2) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$ をあみだくじで表せ. また σ は偶置換と奇置換のいずれか答えよ.

$\boxed{4}$ (1) 次の 2 変数多項式 $f(x, y)$ を基本対称式

$$\sigma_1 = x + y, \qquad \sigma_2 = xy$$

を用いて表せ：

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3$

(b) $f(x, y) = x^6 + y^6 + x^3y^3$

(2) 次の 3 変数多項式 $f(x,y,z)$ を基本対称式

$$\sigma_1 = x+y+z, \qquad \sigma_2 = xy+yz+zx, \qquad \sigma_3 = xyz$$

を用いて表せ：

(c) $f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$

(d) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$

(e) $f(x,y,z) = x^3y + y^3z + z^3x + xy^3 + yz^3 + zx^3$

(3) $x^3 - 2x^2 + 7x + 5 = 0$ の解を α, β, γ とする.

(f) $(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\gamma+\alpha)^2$ の値を求めよ.

(g) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ を解とする 3 次方程式をひとつ与えよ.

$\boxed{5}$ (1) 次の写像 $f : X \to Y$ は, 全射であるか？単射であるか？ 全単射であるか？ をそれぞれの場合について答えよ.

(a) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^3$

(b) $X = Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2 + 1$

(c) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)(x+1)$

(2) X, Y, Z を集合とし, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする.

(d) f, g がともに全射ならば, 合成写像 $g \circ f$ も全射であることを示せ.

(e) f, g がともに単射ならば, 合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ.

$\boxed{6}$ 4 次対称群 S_4 の 4 元 e, σ, τ, ρ を以下のように取る：

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$G = \{e, \sigma, \tau, \rho\}$ とおくとき, G は S_4 の部分群[1] になる.

(1) 群 G の群表を完成させよ.

(2) 次の元を計算せよ (ただし n, m, l は整数とする)：

(a) $\sigma^3\tau^4\rho^5\sigma^7\tau^5\rho^3$

(b) n の偶奇が m, l の偶奇と異なるときの $\sigma^n\tau^m\rho^l$

$\boxed{7}$ 3 変数の (多項) 式

$$f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y,z)$ が対称式であることを示せ. (ただし, $f(x,y,z)$ が多項式であることは仮定して良い.)

(2) $f(x,y,z)$ を求めよ.

[1]クラインの 4 元群と呼ばれる

[1]講義に関する情報は次のサイトを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/gt.html