代数学序論, 中間試験問題用紙

2014/11/24 担当：那須

- 問題を良く読んで, 解答を別紙「解答用紙」に記入せよ.
- 答えには下線を引く などし, わかりやすくすること.

$\boxed{1}$ 自然数 $n \geq 2$ に対し, S_n は n 次対称群を表す.

(1) 4 次置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対し, 積 $\sigma\tau\sigma^{-1}$ を計算せよ.

(2) サイクルの積 $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 4\ 5)(4\ 5\ 6\ 7) \in S_7$ を計算せよ. ただし, 答えはサイクルの分離積として表すこと.

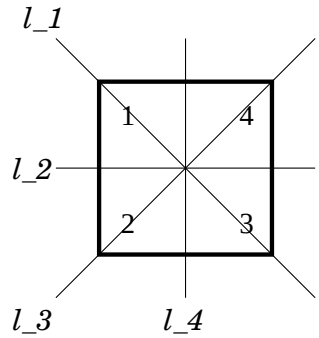
(3) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 5 & 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in S_{10}$ の位数を求めよ.

(4) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$ をあみだくじで表せ. また σ は偶置換と奇置換のいずれか答えよ.

(5) 置換 $\sigma = (1\ \cdots 4)(5\ \cdots\ 13)(14\ \cdots\ 39) \in S_{39}$ の偶奇を判定せよ. ただし, $\cdots$ は連続する整数を表す.

$\boxed{2}$ (1) 右の基準の正方形□を含む平面において, I を恒等変換, R_1,R_2,R_3 を□の中心の周りのそれぞれ角度 90° ,180° ,270° の回転移動 (反時計回り) とし, さらに T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を, 直線 l_i に関する折り返し (対称移動) とする.
基準の正方形□を次の合同変換で変換した正方形を求めよ. なお解答は解答欄の正方形の頂点に数字を記入して答えよ.

□ =

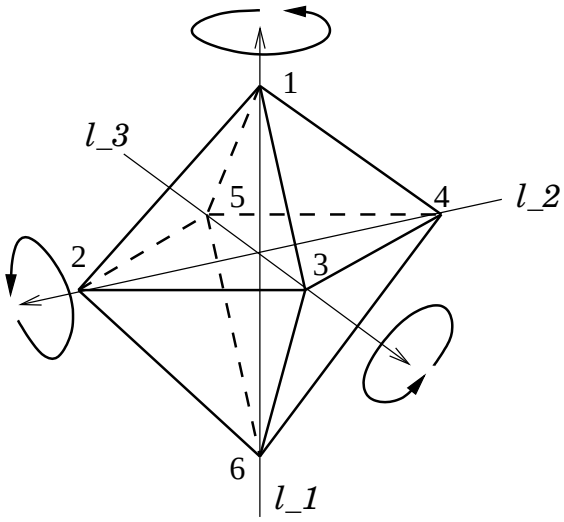


(a) $R_2 \circ T_3$

(b) $R_1 \circ T_4 \circ R_3$

(2) 右の基準の正八面体を含む空間において, 直線 l_i を中心とする角度 90° の回転移動を表す合同変換をそれぞれ R_i とする $(i = 1, 2, 3)$. ただし, 回転は矢印に向かって右ねじ方向 (図の方向) に回転する. なお合同変換 f に対し f^n は f の n 回の合成 $f^n = f \circ \cdots \circ f$ を表すものとする.

基準の正八面体を次の合同変換で変換した正八面体を求めよ. なお解答は解答欄の正八面体の頂点に数字を記入して答えよ.



(c) $(R_2 \circ R_3 \circ R_1)^{13}$

問題は裏面にもあります

$\boxed{3}$ (1) 次の写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のうち, 全単射であるものを全て選択し, 記号を解答欄に記入せよ.

(a) $f(x) = -x^3$ (b) $f(x) = x^2 - x$ (c) $f(x) = \sin x$

(2) X, Y, Z を集合とし, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. 次の命題のうち, 正しいものを全て選択し、その記号を解答欄に記入せよ.

(ア) f, g がともに単射ならば, 合成写像 $g \circ f$ も単射である.

(イ) $g \circ f$ が単射ならば, g は単射である.

(ウ) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

(エ) $g \circ f$ が全射ならば, f は全射である.

(3) 前問で選択した正しい命題の中から **1 つを** 選び, 記号を解答欄に記入した上で, 証明せよ.

$\boxed{4}$ (1) 2 変数対称式

$$f(x, y) = x^5y + x^3y^3 + xy^5$$

を基本対称式

$$\sigma_1 = x + y \qquad \sigma_2 = xy$$

を用いて表せ.

(2) 3 次方程式

$$x^3 + x - 2 = 0$$

の 3 つの解を α, β, γ とする. 平方 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ を 3 つの解に持つような 3 次方程式をひとつ与えよ.

(3) 3 変数対称式

$$f(x, y, z) = x(y + z)^3 + y(z + x)^3 + z(x + y)^3$$

を基本対称式

$$\sigma_1 = x + y + z, \qquad \sigma_2 = xy + yz + zx, \qquad \sigma_3 = xyz$$

を用いて表せば,

$$x(y + z)^3 + y(z + x)^3 + z(x + y)^3 = a\sigma_1^4 + b\sigma_1^2\sigma_2 + c\sigma_2^2 + d\sigma_1\sigma_3,$$

と表される. 定数 a, b, c, d の値を求めよ.

[0]講義に関する情報は次のサイトを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/gt.html