代数学序論, 演習問題 (12/11) の答え

2014/12/15 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) $1204 = 817 \times 1 + 387$. $817 = 387 \times 2 + 43$. $387 = 43 \times 9$. よって，$\gcd(1204, 817) = 43$.

(2) $2747 = 804 \times 3 + 335$. $804 = 335 \times 2 + 134$. $335 = 134 \times 2 + 67$. $134 = 67 \times 2$. よって，$\gcd(2747, 804) = 67$.

$\boxed{2}$ (1) 問題$\boxed{1}$より，$\gcd(1204, 817) = 43$. $83 = 43 \times 1 + 40$. $43 \nmid 83$ なので解なし．

(2) 問題$\boxed{1}$より，$\gcd(2747, 804) = 67$. $603 = 67 \times 9$. $67 \mid 603$ なので解は存在する．

$\boxed{3}$ (1) 問題$\boxed{1}$より，$d = \gcd(1204, 817) = 43$. $1204 = 43 \times 28$. $817 = 43 \times 19$. よって，$a' = 28, b' = 19$.

(2) 問題$\boxed{1}$より，$d = \gcd(2747, 804) = 67$. $2747 = 67 \times 41$. $804 = 67 \times 12$. よって，$a' = 41, b' = 12$.

$\boxed{4}$ (1) $28 = 1 \times 19 + 9$. $19 = 2 \times 9 + 1$. よって，$\gcd(28, 19) = 1$. $\begin{pmatrix} 28 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 28 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

よって、$28 \times (-2) + 19 \times 3 = 1$. 一つの解は，$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

(2) 問題$\boxed{1}$より，$d = \gcd(2747, 804) = 67$. $2747 = 67 \times 41$. $804 = 67 \times 12$. よって，$41x + 12y = 1$ を解けばよい．

$$\begin{pmatrix} 41 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 41 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 12 \end{pmatrix}$$

よって、$41 \times 5 + 12 \times (-17) = 1$. 一つの解は，$\begin{cases} x = 5 \\ y = -17 \end{cases}$

$\boxed{5}$ (1) 前問で，$28x + 19y = 1$ の解を求めたので，それを 3 倍すれば $28x + 19y = 3$ の解になる．$\begin{cases} x = -6 \\ y = 9 \end{cases}$

(2) $268 = 67 \times 4$ なので，前問で求めた $2747x + 804y = 67$ の解を 4 倍すれば $2747x + 804y = 268$ の解になる．$\begin{cases} x = 20 \\ y = -68 \end{cases}$

$\boxed{6}$ (1) $\gcd(28, 19) = 1$ なので，$\begin{cases} x = 19t \\ y = -28t \quad (t \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

(2) $\gcd(2747, 804) = 67$ なので，$2747 = 67 \times 41$, $804 = 67 \times 12$ より $\begin{cases} x = 12t \\ y = -41t \quad (t \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\boxed{7}$ (1) $\begin{cases} x = -6 + 19t \\ y = 9 - 28t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$ (2) $\begin{cases} x = 20 + 12t \\ y = -68 - 41t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$

$\boxed{8}$ (1) $\begin{cases} x &= -16 + 9t \\ y &= 20 - 11t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$ (2) $\begin{cases} x &= -18 + 14t \\ y &= 30 - 23t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$ (3) $\begin{cases} x &= 3861 + 67t \\ y &= -7605 - 132t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/gt.html