中間レポート問題

- 裏面の注意を良く読んだ上で, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2014 年 12 月 10 日 (水)16:00** までに理学部事務室のレポートボックスに提出しなさい.

$\boxed{1}$ (1) 次の連立合同方程式を解け.

(a) $\begin{cases} x & \equiv 7 \mod 9 \\ x & \equiv 5 \mod 13 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 5 \\ x & \equiv -2 \mod 6 \\ x & \equiv 6 \mod 7 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 5 \\ x & \equiv 4 \mod 8 \\ x & \equiv -7 \mod 13 \end{cases}$

(2) a, b を整数とする. 連立合同方程式

$$\begin{cases} x & \equiv a \mod 6 \\ x & \equiv b \mod 8 \end{cases} \tag{$\heartsuit$}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(d) 解が存在する為の条件を求めよ. (条件を a, b を用いて表せ.)

(e) 前問で求めた条件のもとで, ($\heartsuit$) の全ての解を求めよ.

$\boxed{2}$ 3 元体 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ の元を成分とする 2 次正則行列からなる群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad a \neq 0 \right\}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) G の元を全て求めよ.

(2) 行列の積を

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 \mod 3 & a_1b_2 + b_1d_2 \mod 3 \\ c_1a_2 + d_1c_2 \mod 3 & c_1b_2 + d_1d_2 \mod 3 \end{pmatrix}$$

により定める (通常の行列の積を $\mod 3$ で考える). G の群表を計算せよ. (G の元に適当に名前を付けて答えよ.)

(3) G の各元の位数を求めよ.

(4) G から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times = \{1, 2\}$ への準同型写像を,

$$f : G \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times, \qquad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = a$$

により定める. f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ を求めよ. また $\ker f$ と同型な群の例を 1 つあげよ.

(5) 準同型定理を用いて, $G/\ker f$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が同型であることを示せ. (ヒント：$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

(6) G と同型な群の例を 1 つ挙げよ.

$\boxed{3}$ (1) $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}[\omega]$ を示せ. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根, すなわち $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ とする.

(2) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(a) $\alpha = 1 + \sqrt{10}, \quad f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha + 1}$

(b) $\alpha = \sqrt[3]{2}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 - 2}$

注意点 (良く読んで解答すること)

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したもの写させたものを問わず, 評価を 0 点とする.
- 図書・文献などを参照し解答した場合には, 参照した文献を明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2014/fg.html